

# 6. COMPORTEMENT DES SOLIDES DEFORMABLES

## -Résistance des matériaux-

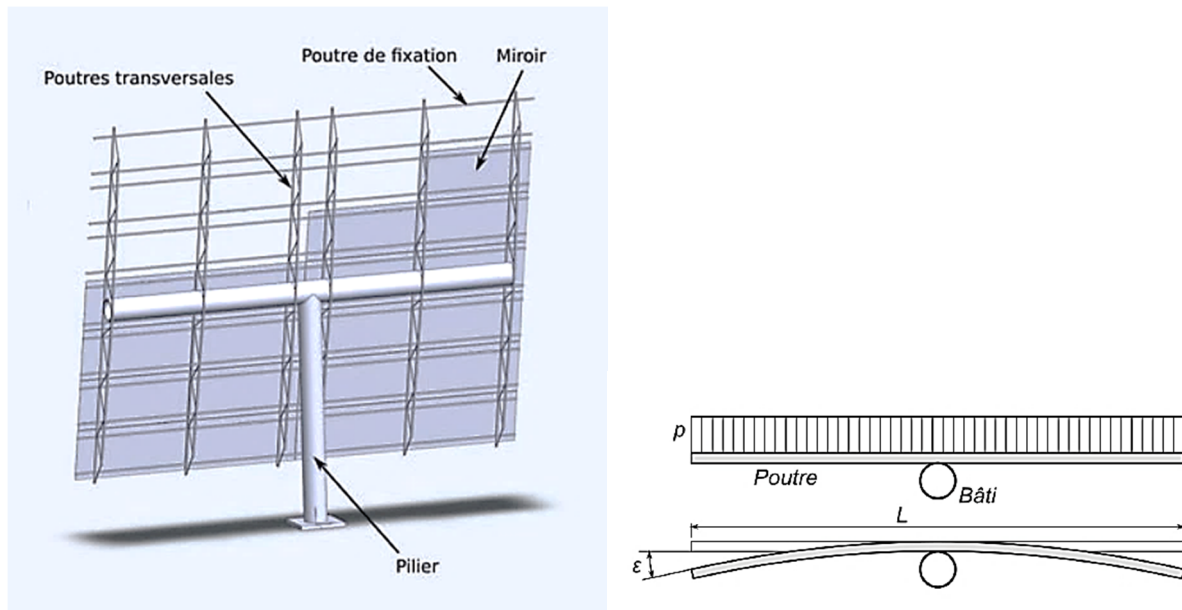
1.	INTRODUCTION :	2
2.	CADRE D'ETUDE :	3
2.1.	OBJET D'ETUDE :	3
2.2.	CONSEQUENCES SUR LE COMPORTEMENT CINEMATIQUE D'UNE SECTION DROITE (S) :	5
2.3.	LES CONDITIONS AUX LIMITES :	6
3.	TORSEUR DE COHESION :	8
3.1.	EXPRESSION DU TORSEUR DE COHESION :	8
3.2.	TORSEUR DE COHESION, VOCABULAIRE ASSOCIE :	9
3.3.	DIAGRAMMES DES COMPOSANTES DU TORSEUR DE COHESION :	11
4.	LA CONTRAINTE, UNE GRANDEUR LOCALE :	12
4.1.	LA COHESION, UN CONCEPT GLOBAL AUX CAUSES LOCALES :	12
4.2.	LE VECTEUR CONTRAINTE , DESCRIPTION :	12
4.3.	EXPRESSION INTEGRALE DU TORSEUR DE COHESION :	13
5.	SOLLICITATIONS ELEMENTAIRES :	15
5.1.	LA TRACTION/ LA COMPRESSION :	15
5.2.	LA FLEXION SIMPLE :	21
5.3.	LA TORSION :	28
5.4.	LE CISAILLEMENT PUR :	33

*Elaboré par Youssef RAHOU, janvier 2018*

## 1. Introduction :

A priori, toutes les connaissances acquises se basent sur le modèle du solide indéformable, qui reste un modèle pertinent qui couvre de nombreux cas d'études rencontrés, cependant la théorie basée sur ce modèle de **comportement** indéformable du solide peut montrer des limites, par conséquent le modèle du solide déformable prend le relais, pour ainsi être complémentaire du premier modèle.

Pour illustrer la nécessité d'un tel modèle, prenons l'exemple d'un miroir réfléchissant (appelé héliostat) sur les centrales thermiques à concentration à tour, le rôle de ce miroir est de réfléchir de manière optimale les rayons du soleil sur une tour thermique. Cependant son rendement se voit affecter par la déformation de sa structure, cette déformation due à son poids, devient critique lorsque le miroir est en position horizontale :



*Figure 1. Cas d'étude montrant la nécessité du modèle du solide déformable.*

Par conséquent, **une étude de ce comportement déformable** doit être menée pour prendre en compte ces conséquences lors de la phase de conception.

## 2. Cadre d'étude :

### 2.1. Objet d'étude :

L'objectif de ce cours est d'établir une théorie simple permettant de traiter le comportement des solides déformables, cependant, une telle théorie serait complexe, à moins de restreindre le champ des solides déformables étudiés, pour ainsi obtenir une théorie relativement simple, par conséquent, on ne s'intéressera qu'à une géométrie particulière de solides indéformables, appelée poutre.

#### A. Définition d'une poutre :

Une poutre est un solide engendré par **une surface plane (S)** dont le centre d'inertie géométrique  $G$  décrit une courbe  $(G_0G_1)$ , **Cette courbe  $(G_0G_1)$  est appelée fibre/ligne moyenne.**

- 1. Le plan de (S) restant normal à la courbe  $(G_0G_1)$ .
- 2. On ne s'intéresse qu'aux poutres de sections constantes, dont la surface (S) reste constante, et dans un cas limite, on peut supporter le cas d'une section (S) qui varie de manière continue.
- 3. Le rayon de courbure de la ligne moyenne doit être plus grand par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport supérieur à 5).
- 4. La longueur de la ligne moyenne est grande par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport supérieur à 5), dans le cas des poutres droites, le rayon de courbure étant infini.
- 5. On suppose que les déformations subies par la poutre restent petites, ainsi que les déplacements des points de la poutre. Une conséquence immédiate de cette hypothèse est **la possibilité d'appliquer le Principe Fondamental de la Statique**, en considérant le solide comme indéformable. Cette hypothèse est appelée hypothèse de petits-déplacements (H.P.P).

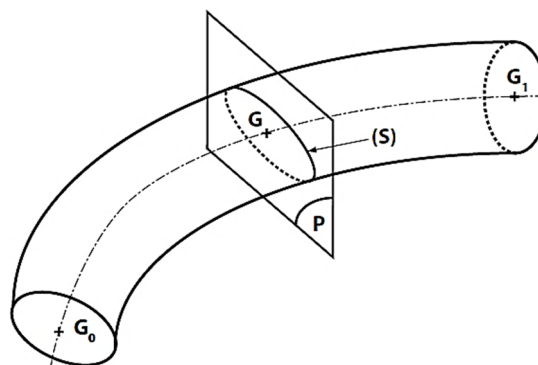


Figure 2. Profil général d'une poutre.

#### Vocabulaire :

- **Une poutre droite** est une poutre dont **la fibre moyenne est un segment de droite** orienté.
- **Une poutre plane** est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe restant dans le même plan géométrique.
- **Une poutre à plan moyen** est une poutre plane dont **un plan de la fibre moyenne est un plan de symétrie**, appelé plan moyen de la poutre.

## B. Hypothèses d'étude du comportement du solide déformable :

- **Hypothèses relatives à la nature et la géométrie du solide :**
- Le solide étudié est **une poutre, droite, à plan moyen**, ainsi la poutre étudiée sera totalement définie par sa fibre moyenne (segment de droite dans ce cas) et sa section droite.

Par conséquent, une telle poutre, peut être décrite par sa fibre moyenne ainsi que sa section droite :

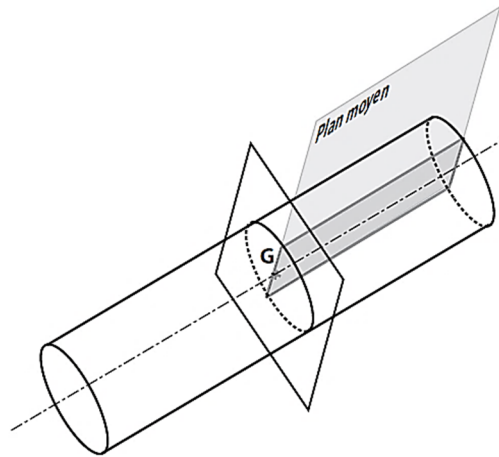


Figure 3. Géométrie d'une poutre droite à plan moyen.

Un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est associé à la poutre, tel que O est positionné à l'origine de la fibre moyenne, et  $(\vec{x}, \vec{y})$  est le plan de symétrie ou plan moyen :



Figure 4. Disposition répondue du repère par rapport à la ligne moyenne.

- **Hypothèses relatives au matériau constituant la poutre :**

Dans toute l'étude de résistance des matériaux menée, le matériau sera considéré **homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire** :

- **Matériau homogène** : représente des propriétés uniformes dans tout son étendue.
- **Matériau isotrope** : il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace, exemple : le bois n'est pas un matériau isotrope, mais fibreux.
- **Matériau à comportement élastique linéaire** : Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque, il est en plus à comportement linéaire, **si la relation liant cette charge/décharge à la déformation est linéaire** :

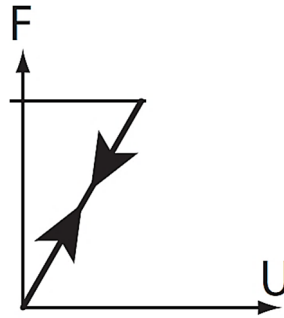


Figure 5. Comportement élastique linéaire d'un matériau.

- **Les deux hypothèses fondamentales de la RdM:**
- **Conséquence du principe de Saint-Venant :** les résultats obtenus par un calcul de RdM sur une poutre ne seront valables que dans des zones **suffisamment éloignées de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées (ponctuelles) et des liaisons**. En pratique, à une distance supérieure à 2 fois la plus grande dimension transversale de la poutre.
- **Hypothèse de Navier-Bernoulli :** toute section droite (plane et **normale** à la ligne moyenne) avant déformation reste droite (**plane et normale** à la ligne moyenne) après déformation :

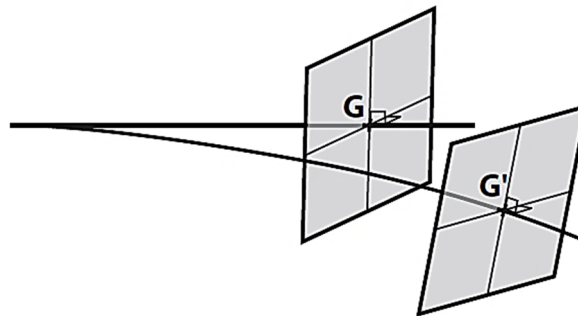


Figure 6. Schématisation de l'hypothèse Navier-Bernoulli, cas d'une poutre.

## 2.2. Conséquences sur le comportement cinématique d'une section droite (S) :

L'hypothèse de Navier-Bernoulli permet de décrire le comportement cinématique d'une section droite de la poutre, par un torseur appelé torseur des petits déplacements, qui dans le cas des poutres à plans moyens (plans de symétrie), aura quatre composantes :

- **Deux déplacements suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , respectivement notés  $u$  et  $v$ . (unité : m).**
- **Deux rotations autour de  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ , respectivement notés  $\theta$  et  $\omega$ . (unité : rad).**

Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne, la rotation de la section autour de  $\vec{z}$ , donc  $\omega$ , est liée à la dérivée du déplacement dans la direction  $\vec{y}$ , donc  $\frac{dv}{dx}$  :  $\omega = \frac{dv}{dx}$ .

Ainsi, le comportement cinématique d'une section droite S de la poutre est décrit par le torseur des petits déplacements :

$$\{\mathcal{U}(S : \text{section droite}/\mathbf{R})\}_G = \begin{Bmatrix} \theta \cdot \vec{x} + \omega \cdot \vec{z} \\ u \cdot \vec{x} + v \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}, \quad \omega = \frac{dv}{dx}$$

Avec G : centre d'inertie de la section droite S de la poutre.

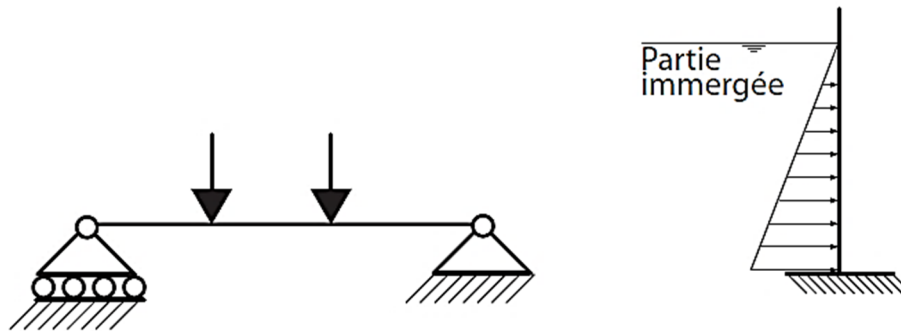
**Remarque :**

Le déplacement d'un point M quelconque de la section droite (S) de la poutre, est exprimé en réduisant le torseur des petits déplacements de la section (S) au point M.

**2.3. Les conditions aux limites :****A. Efforts extérieurs :**

Deux types d'efforts extérieurs existent :

- Efforts concentrés, donc appliqué en un point de la poutre, modélisées par des torseurs d'actions mécaniques exprimés au centre de gravité G de la section (S) correspondante.
- Efforts répartis, de manière continue, caractérisé par un profil de densité linéique :



*Figure 7. Efforts extérieurs, deux configurations, A gauche, efforts concentrés, à droite, effort réparti (exemple : eau → barrage).*

Dans le cas des poutres à plan moyen, en observant le torseur des petits déplacements, le torseur des actions mécaniques extérieurs s'écrit :

$$\{ T (\text{Ext} \rightarrow \text{poutre}) \} = \begin{Bmatrix} XG.\vec{x} + YG.\vec{y} \\ LG.\vec{x} + MG.\vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

**B. Conditions aux limites au niveau des liaisons :**

Les liaisons considérées dans l'étude du solide déformable sont considérées parfaites, il s'agit simplement des liaisons usuelles connues. Le cas étudié, qui est celui de la poutre à plan moyen, réduit les catégories de liaison liant la poutre au milieu extérieur à seulement trois types (voir figure 8) :

- **Appui simple** : Il s'agit d'une liaison imposant une action appliquée au point d'appui et perpendiculaire au contact. Concrètement, c'est une liaison ponctuelle, considérée dans un plan qui est le plan moyen de la poutre.

Le torseur des actions transmissibles au niveau d'un appui simple s'écrit :

$$\{ T_{\text{appui simple}} (\text{Ext} \rightarrow \text{poutre}) \} = \begin{Bmatrix} YA.\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Le torseur des petits déplacements au niveau du point A, maintient **trois paramètres non nuls**, u,  $\theta$  et  $\omega$ , cependant l'action YA impose un déplacement v nul en A :

$$v(A)=0, \text{ appui simple.}$$

- **Articulation** : il s'agit d'une liaison rotule considérée dans un plan qui est le plan moyen de la poutre.

Le torseur des actions transmissibles au niveau d'une articulation s'écrit :

$$\{T_{\text{articulation}}(\text{Ext} \rightarrow \text{poutre})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_B \cdot \vec{y} + Y_B \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Le torseur des petits déplacements au niveau du point B, maintient **deux paramètres non nuls**,  $\theta$  et  $\omega$ , cependant les actions  $X_B$  et  $Y_B$  imposent des déplacements  $u$  et  $v$  nuls en B :

$$u(B)=v(B)=0, \text{ articulation}$$

- **Encastrement** : il s'agit d'une liaison complète considérée dans un plan qui est le plan moyen de la poutre.

Le torseur des actions transmissibles au niveau d'un encastrement s'écrit :

$$\{T_{\text{encastrement}}(\text{Ext} \rightarrow \text{poutre})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_C \cdot \vec{x} + Y_C \cdot \vec{y} \\ LC \cdot \vec{x} + MC \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_C$$

L'ensemble des quatre actions de ce torseur imposent des déplacements  $u$  et  $v$ ,  $\theta$  et  $\omega$  nuls en C :

$$u(C)=v(C)=\theta(C)=\omega(A)=0, \text{ encastrement}$$

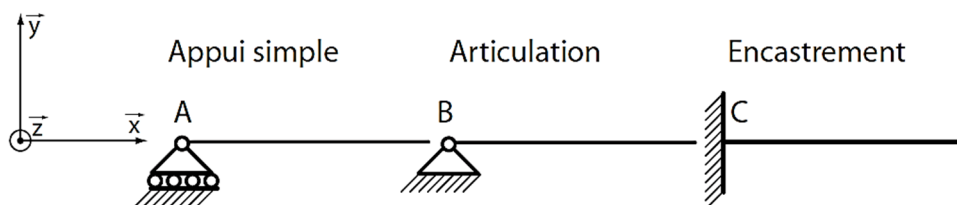


Figure 8. Les trois types de liaisons usuelles liant une poutre au milieu extérieur.

### 3. Torseur de cohésion :

Appelé aussi **torseur des efforts intérieurs**, il représente les actions de cohésion au niveau de la section (S) de la poutre.

#### 3.1. Expression du torseur de cohésion :

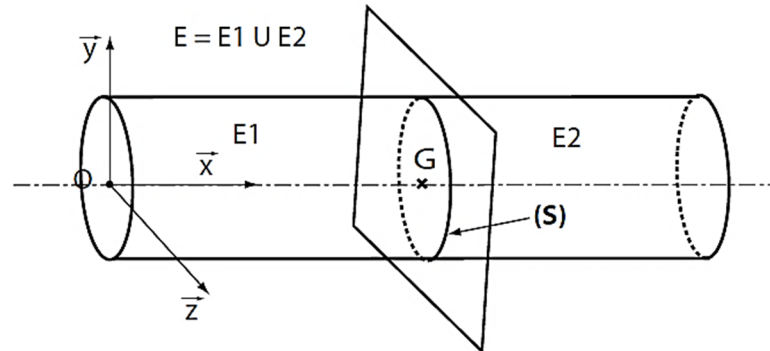


Figure 9. Modèle de poutre étudié.

Soit une poutre E **en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs**, séparée en deux parties E1 et E2, telles que  $E = E1 \cup E2$ . **Cette séparation n'est que virtuelle**, E1 est nommée partie gauche, en référence à l'orientation du vecteur  $\vec{x}$ , alors que E2 est nommée partie droite.

**La coupure virtuelle** permettant d'obtenir E1 et E2 est faite au niveau de la section droite (S) de centre d'inertie G.

Le PFS appliqué à E, s'écrit :

$$\{T(\text{Ext} \rightarrow E)\} = \{O\}$$

or :

$$\{T(\text{Ext} \rightarrow E)\} = \{T(\text{Ext} \rightarrow E1)\} + \{T(\text{Ext} \rightarrow E2)\}$$

Il vient donc :

$$\{T(\text{Ext} \rightarrow E1)\} + \{T(\text{Ext} \rightarrow E2)\} = \{O\}$$

Isolant maintenant E1, il est en équilibre, il est soumis à :

- $\{T(\text{Ext} \rightarrow E1)\}$ .
- Il est aussi soumis aux actions de la partie E2 sur la partie E1 au niveau de la section droite (S), ces actions sont inconnues, cependant la liaison entre E1 et E2 peut être modélisée par un encastrement, par conséquent le torseur des actions mécaniques de E2 sur E1 peut être associé à celui d'une liaison encastrement, **ce torseur  $\{T(E2 \rightarrow E1)\}$  est appelé torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion**. En effet, ce sont les composantes de ce torseur qui **assure la cohésion des deux parties E1 et E2** de la poutre E.

Ainsi, on définit le torseur de cohésion par :

$$\{T \text{ int}\} = \{T(E2 \rightarrow E1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(E2 \rightarrow E1) \\ \vec{M}_G(E2 \rightarrow E1) \end{Bmatrix}$$

Le torseur de cohésion est exprimé au point G, centre d'inertie de la section droite (S).



**Remarque :**

Le fait de définir le torseur de cohésion  $\{T \text{ int}\}$ , comme torseur des actions transmissibles de E2 vers E1 au lieu de E1 vers E2 est une pure convention, mais une fois faite, il faut la respecter.

Le P.F.S. appliqué à E1, il s'écrit :

$$\{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E1})\} + \{T \text{ int}\} = \{0\}$$

Il vient :

$$\{T \text{ int}\} = - \{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E1})\} = - \begin{Bmatrix} \vec{R}(\text{Ext} \rightarrow \text{E1}) \\ \vec{M}_G(\text{Ext} \rightarrow \text{E1}) \end{Bmatrix}$$

De même, le PFS appliqué à E2, s'écrit :

$$\{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E2})\} + T (\text{E2} \rightarrow \text{E1}) = \{0\}$$

or:

$$T (\text{E2} \rightarrow \text{E1}) = - T (\text{E1} \rightarrow \text{E2}) = - \{T \text{ int}\}.$$

d'où :

$$\{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E2})\} - \{T \text{ int}\} = \{0\}$$

Il vient :

$$\{T \text{ int}\} = + \{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E2})\} = + \begin{Bmatrix} \vec{R}(\text{Ext} \rightarrow \text{E2}) \\ \vec{M}_G(\text{Ext} \rightarrow \text{E2}) \end{Bmatrix}$$

Au final, le torseur de cohésion représente, par convention, les actions mécaniques exercées, au niveau d'une section droite (S) (lieu de coupure de la poutre en deux parties E1 et E2), **par la partie située à droite de la coupure (E2) sur la partie située à gauche de la coupure (E1)** :

$$\{T \text{ int}\} = \{T (\text{E2} \rightarrow \text{E1})\} = - \{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E1})\} = + \{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E2})\}$$

**Remarque :**

- Lorsque l'évaluation du torseur de cohésion est faite en évaluant le torseur -  $\{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E1})\}$ , **il faut surtout ne pas oublier le signe moins.**
- A priori, le torseur de cohésion est propre à chaque coupure, est donc à chaque section droite (S) de la poutre, et dépend des efforts extérieurs à E1 (si on l'exprime par : -  $\{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E1})\}$ ), ou à E2 ((si on l'exprime par :  $\{T (\text{Ext} \rightarrow \text{E2})\}$ ) (voir TD1).

**3.2. Torseur de cohésion, vocabulaire associé :**

Dans un repère  $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié à la section droite (S), le torseur de cohésion, **dans sa forme générale**, s'écrit :

$$\{T \text{ int}\}_G = \begin{Bmatrix} N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \\ M_t \cdot \vec{x} + M_{fy} \cdot \vec{y} + M_{fz} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

Les noms choisis pour les six composantes du torseur renvoient vers les sollicitations provoquées sur la poutre, ainsi :

- N est l'**effort normal**, puisqu'il est suivant  $\vec{x}$ , donc **normal** à la section droite (S).
- Ty et Tz sont **les efforts tranchants**, puisqu'ils ont tendance à **trancher la poutre** perpendiculairement à la ligne moyenne.
- Mt est le moment de torsion, puisqu'il a tendance à **tordre la poutre** autour de la ligne Moyenne.
- Mfy et Mfz sont les moments de flexion, puisqu'ils ont tendance à faire **fléchir la poutre** Respectivement autour des axes  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ .

**Remarque :**

**Dans le cas d'une poutre droite à plan moyen** (qui est le plan de symétrie de la poutre), le torseur de cohésion se réduit à :

$$\{T \text{ int}\}_G = \begin{Bmatrix} N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} \\ Mt \cdot \vec{x} + Mfz \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

Ce torseur, prend des formes particulières associées à des sollicitations couramment rencontrées, dites **sollicitations élémentaires** :

- **Sollicitation élémentaire de traction/compression** : le torseur de cohésion est à une seule composante, qui est l'effort normal :

$$\{T \text{ int}(\text{traction/compression})\}_G = \begin{Bmatrix} N \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Traction si  $N > 0$ , compression dans le cas inverse.

- **Sollicitation élémentaire de cisaillement pure** : le torseur de cohésion est à une seule composante, qui est l'effort tranchant :

$$\{T \text{ int}(\text{cisaillement pure})\}_G = \begin{Bmatrix} T_y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

- **Sollicitation élémentaire de torsion** : le torseur de cohésion est à une seule composante, qui est le moment de torsion :

$$\{T \text{ int}(\text{torsion})\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ Mt \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_G$$

- **Sollicitation élémentaire de flexion pure** : le torseur de cohésion est à une seule composante, qui est le moment de flexion :

$$\{T \text{ int}(\text{flexion pure})\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ Mfz \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

- **Sollicitation élémentaire de flexion simple** : le torseur de cohésion est à **deux composantes**, l'effort tranchant et le moment de flexion :

$$\{T \text{ int}(\text{flexion simple})\}_G = \begin{Bmatrix} T_y \cdot \vec{y} \\ Mfz \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

### 3.3. Diagrammes des composantes du torseur de cohésion :

La description du comportement du solide déformable, et donc la résistance des matériaux, a pour objectif de dimensionner ou vérifier le bon dimensionnement d'une structure donnée, ceci est fait au niveau local, là où cette structure est la plus sollicitée, par conséquent, il est utile d'exprimer le torseur de cohésion au niveau de différentes sections droites, **en vue d'identifier la section critique, qui subit le maximum de sollicitation.**

En pratique, on représente l'évolution des composantes du torseur de cohésion en fonction de l'abscisse  $x$ . (voir TD1).

## 4. La contrainte, une grandeur locale :

### 4.1. La cohésion, un concept global aux causes locales :

A priori, la **cohésion** entre deux parties E1 et E2 de la poutre **est modélisée, selon une approche globale**, par le torseur de cohésion traduisant les actions mécaniques appliquées par la partie E2 sur la partie E1 au niveau de la section droite (S) ; section de coupure.

En réalité, derrière cette cohésion, il existe des **actions mécaniques locales réparties sur toute la sections (S)**.

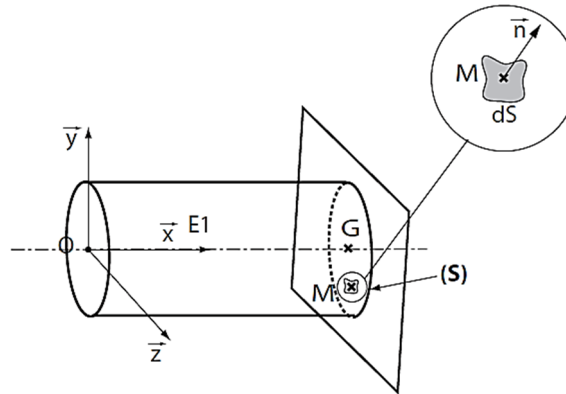


Figure 10. Description locale de la section droite (S), ici  $\vec{n} = \vec{x}$ .

Une description locale, au niveau d'une surface élémentaire  $dS$ , devient nécessaire, soit donc un point M quelconque de la section droite (S), **considérons la surface élémentaire voisine à M, notée  $dS$ , de normale  $\vec{n}$**  (voir figure 10).

Les actions mécaniques s'exerçant sur cette surface élémentaire  $dS$ , se réduisent à un effort élémentaire  $d\vec{F}(E2 \rightarrow E1)$  **proportionnel à la surface élémentaire  $dS$ , à travers un vecteur local traduisant un effort surfacique, appelé vecteur contrainte et noté  $\vec{T}(M, \vec{n})$** , on a donc :

$$d\vec{F}(M, E2 \rightarrow E1) = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS$$

$\vec{T}(M, \vec{n})$  : **vecteur contrainte, unité (N/m<sup>2</sup>)**

Remarque :

- $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$
- $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$ .
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10 \text{ N/cm}^2$ .

### 4.2. Le vecteur contrainte , description :

Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  caractérise l'effort surfacique au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$ . On peut toujours le décomposer en un vecteur normal à la surface  $dS$ , donc suivant  $\vec{n}$ , et un autre vecteur contenu dans le plan de la surface  $dS$ , donc tangent à  $dS$  :

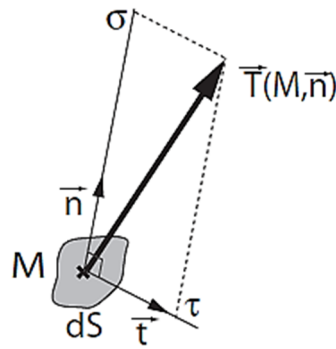


Figure 11. Décomposition du vecteur contrainte.

Ceci peut être formulé par l'expression suivante :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}.$$

- $\vec{n}$  : vecteur normal à  $dS$ .
- $\vec{t}$  : vecteur tangent à  $dS$ .
- $\sigma$  : **appelé contrainte normale**, il s'agit de la composante du vecteur contrainte suivant  $\vec{n}$ , unité :  $N/m^2$
- $\tau$  : **appelé contrainte tangentielle**, il s'agit de la composante du vecteur contrainte suivant  $\vec{t}$  (vecteur unitaire tangent à  $dS$ ), unité :  $N/m^2$ .

Remarque :

- La contrainte normale  $\sigma$  quantifie les actions surfaciques locales de **tension** au sein de la matière.
- La contrainte tangentielle  $\tau$  quantifie les actions surfaciques locales de **cisaillement** au sein de la matière.

### 4.3. Expression intégrale du torseur de cohésion :

L'introduction de la notion de vecteur contrainte, au niveau d'une surface élémentaire  $dS$  en  $M$ , point quelconque de la section droite ( $S$ ), permet d'établir une nouvelle expression du torseur de cohésion à travers les effort élémentaires  $d\vec{F}(M, E2 \rightarrow E1)$ .

En effet, par définition :

$$\{T \text{ int}\} = \{T (E2 \rightarrow E1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(E2 \rightarrow E1) \\ \vec{M}G(E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\}_G$$

Ce torseur résulte de l'ensemble des actions mécaniques locales au niveau de tous les points  $M$  de la section droite ( $S$ ),

Or, le torseur associé à l'action mécanique locale au **niveau du point  $M$**  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}(E2 \rightarrow E1) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}(E2 \rightarrow E1) \\ \vec{GM} \wedge d\vec{F}(E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\}_G$$

Le torseur de cohésion est la somme de ces torseurs locaux, en considérant tous les points M de la section droite (S) :

$$\{T \text{ int}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{(S)} \overline{dF}(M, E2 \rightarrow E1) \\ \int_{(S)} \overline{GM} \wedge d\overline{F}(M, E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\}_G$$

Or,  $d\overline{F}(M, E2 \rightarrow E1) = \overline{T}(M, \overline{n}) \cdot dS$

D'où l'expression intégrale du torseur de cohésion :

$$\{T \text{ int}\} = \left\{ \begin{array}{l} \iint_{(S)} \overline{T}(M, \overline{n}) \cdot dS \\ \iint_{(S)} \overline{GM} \wedge \overline{T}(M, \overline{n}) \cdot dS \end{array} \right\}_G$$

Avec :  $\overline{T}(M, \overline{n}) = \sigma \cdot \overline{n} + \tau \cdot \overline{t}$ .

**Remarque :**

- L'intérêt d'une certaine expression, et qu'elle permet de lier **une grandeur locale qui est la contrainte**, utilisée dans **le dimensionnement des structures**, au torseur de cohésion, qui est lié aux **efforts extérieurs, qui sont des grandeurs globales**.
- Le dimensionnement d'une structure consiste à vérifier que la contrainte ne dépasse pas une valeur admissible garantissant un comportement "normal" du matériau constituant la structure.

## 5. Sollicitations élémentaires :

### 5.1. La traction/ la compression :

#### A. Définition

Une poutre est dite sollicitée en traction/compression, si le tenseur de cohésion prend la forme suivante :

$$\{T \text{ int(traction/compression)}\}_G = \begin{Bmatrix} N \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Traction si  $N \geq 0$ , la poutre est soumise à une traction, elle est soumise à une compression dans le cas inverse.

#### B. Modèle de répartition des contraintes :

Pour pouvoir établir une relation entre **la grandeur globale, évaluable**, qui est l'effort normal dans ce cas, et **la grandeur locale, conditionnée par une limite admissible, qui est la répartition des contraintes**, il faut d'abord commencer par **identifier le modèle de répartition de ces contraintes dans le cas de la traction**, pour cela, il faut réaliser une **expérimentation** en vue de prévoir le modèle qui y correspond.

Pour l'expérimentation, on adopte une poutre, sur laquelle est dessinée une grille. On sollicite cette poutre en traction, puis on observe le résultat avant et après déformation :

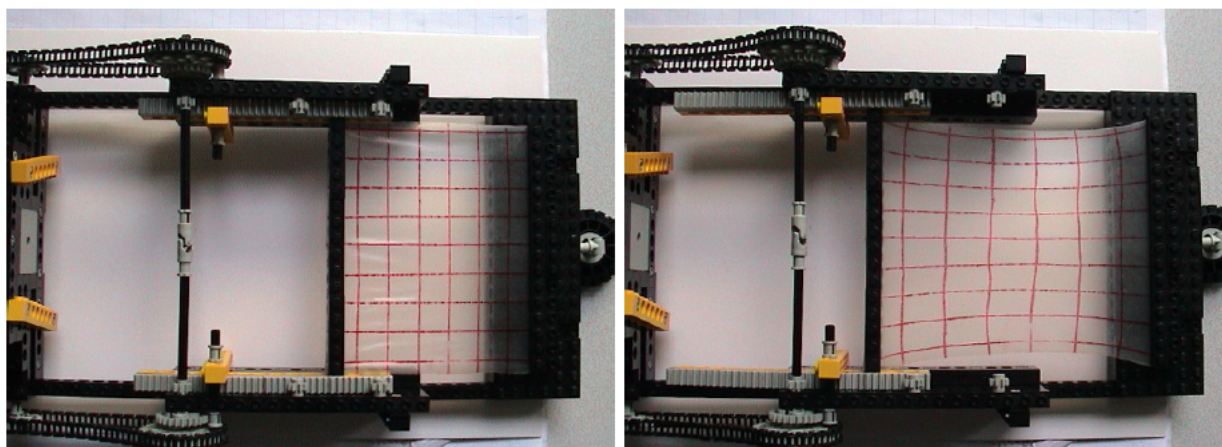


Figure 12. Poutre avant (à gauche) et après (à droite) déformation.

Pour mieux analyser le résultat expérimental, on adopte le schéma idéalisé suivant :

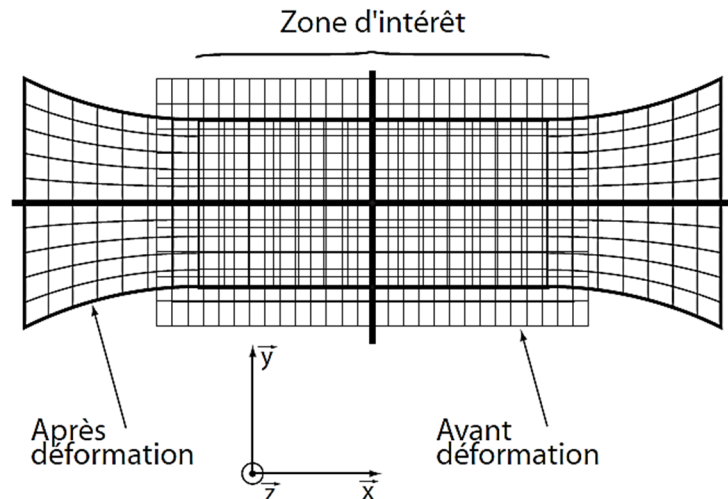


Figure 13. Résultat expérimental de la traction de la poutre, version idéalisée.

A partir du résultat obtenu après déformation, on observe :

- 1. Deux zones de déformations se démarquent, une au niveau des bords, et une au milieu, le principe de Saint-Venant exclut l'étude des bords pour valider la théorie des poutres, ce qui se confirme expérimentalement. Par conséquent, **on ne s'intéressera qu'à la zone du milieu, nommée zone d'intérêt.**
- 2. Dans la zone d'intérêt, on observe une **déformation identique dans les deux directions** (tous les carreaux ont subi la même déformation).
- 3. Dans la zone d'intérêt, **toute section droite s'est déplacée intégralement** cependant on **observe un rétrécissement de la section** (tout segment vertical s'est déplacé intégralement, pour donner un segment toujours vertical mais plus court).
- 4. La grille est passée d'une longueur initiale  $L_0$ , avant déformation, à une longueur finale  $L=L_0+\Delta L$ .

⇒ On prévoit une contrainte tangentielle nulle, car on n'observe aucun glissement entre deux sections voisines.

$$\text{On a donc : } \vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{n}.$$

⇒ On prévoit un état de contrainte identique dans cette zone, donc constant.

$$\text{On a donc : } \vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma(x, y, z) \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{x} \text{ avec } \sigma \text{ constant.}$$

Enfin, pour une sollicitation de traction, le vecteur contrainte est constant et normal à toute section droite de la zone d'intérêt :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{x}, \text{ avec } \sigma \text{ constant.}$$



### C. Relation entre effort normal (grandeur globale) et contrainte (grandeur locale) :

Une fois que le modèle de répartition des contraintes est identifié, on peut simplifier l'expression du torseur de cohésion, en utilisant sa forme intégrale :

En effet :

$$\{T \text{ int}\} = \left\{ \begin{array}{c} N \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{(S)} \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS \end{array} \right\}_G$$

Ce qui donne :

- $N \cdot \vec{x} = \iint_{(S)} dS \cdot \vec{x} = \sigma \cdot S \cdot \vec{x}$ .
- $\iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS = (\iint_{(S)} \vec{GM} \cdot dS) \wedge \sigma \cdot \vec{x}$ ,

Or G est le centre d'inertie de la section (S), donc par définition cette intégrale est nulle, par conséquent on a :  $\vec{0} = \vec{0}$ , on a donc cohérence des résultats.

Au bilan, **pour une sollicitation de traction**, La contrainte normale  $\sigma$  est **constante** est égale à l'effort normal divisé par la surface de la section droite (S) :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

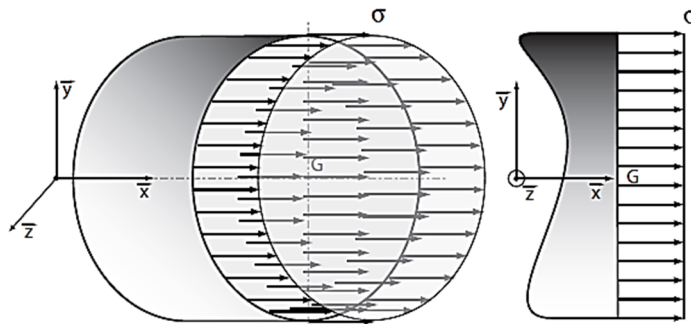


Figure 14. Répartition uniforme des contraintes, cas de la traction.

### D. Relation entre contrainte et déformation, loi de Hooke :

En parallèle avec la démarche expérimentale précédente, pour établir un modèle représentatif de la relation entre contrainte et déformation, **dans le domaine élastique**, on effectue un essai de traction d'une poutre, qui est une éprouvette cylindrique en acier inoxydable :

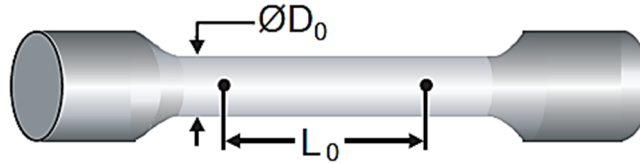


Figure 15. Eprouvette à soumettre à un essai de traction.

Lors de l'essai de traction, on mesure l'effort exercé sur l'éprouvette, ce qui correspond à l'effort normal  $N$ , ainsi que l'allongement de la zone utile, précédemment noté  $\Delta L$ . Ces deux mesures permettent de construire la courbe  $N = N(\Delta L)$  suivante :

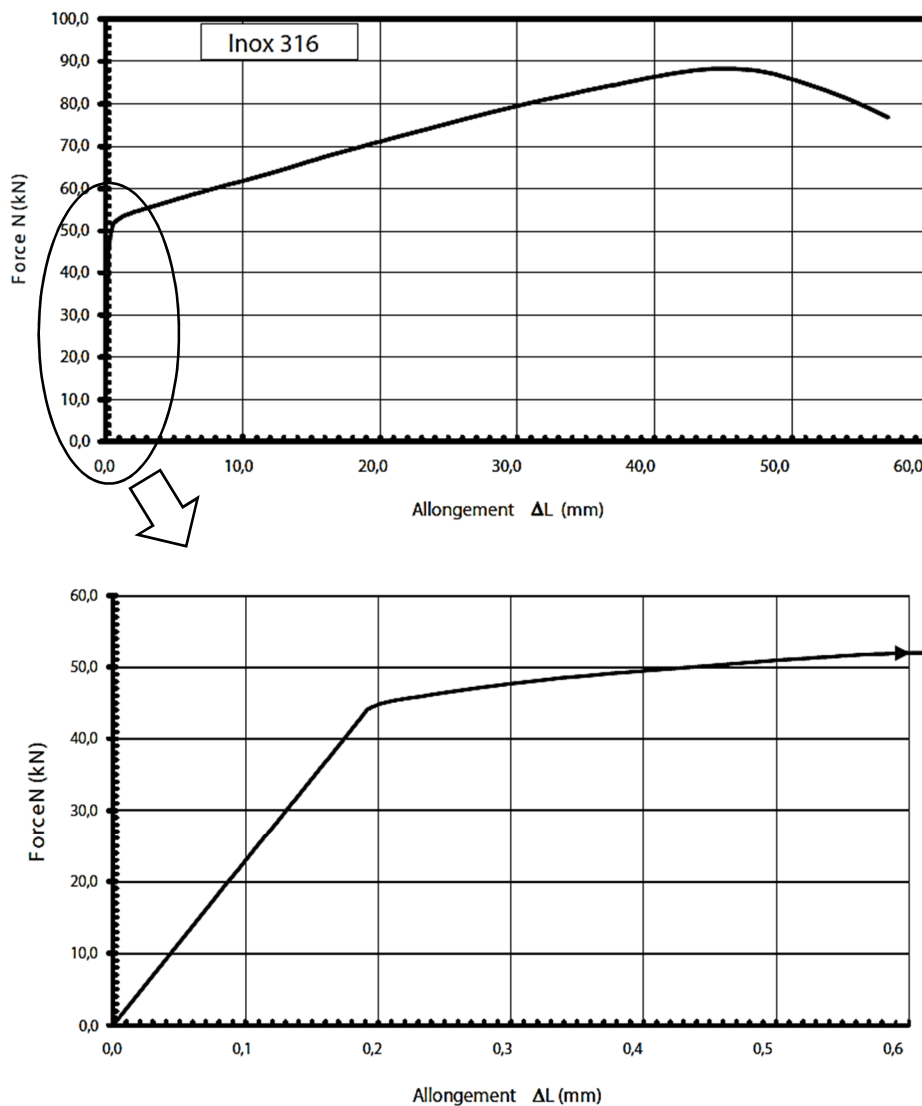


Figure 16. Courbe  $N = N(\Delta L)$ , éprouvette ( $L_0 = 150$  mm,  $D_0 = 15$  mm)

On distingue deux zones :

- Une zone à évolution linéaire, dite **zone élastique**.
- Une zone à évolution non linéaire, dite **zone plastique**.

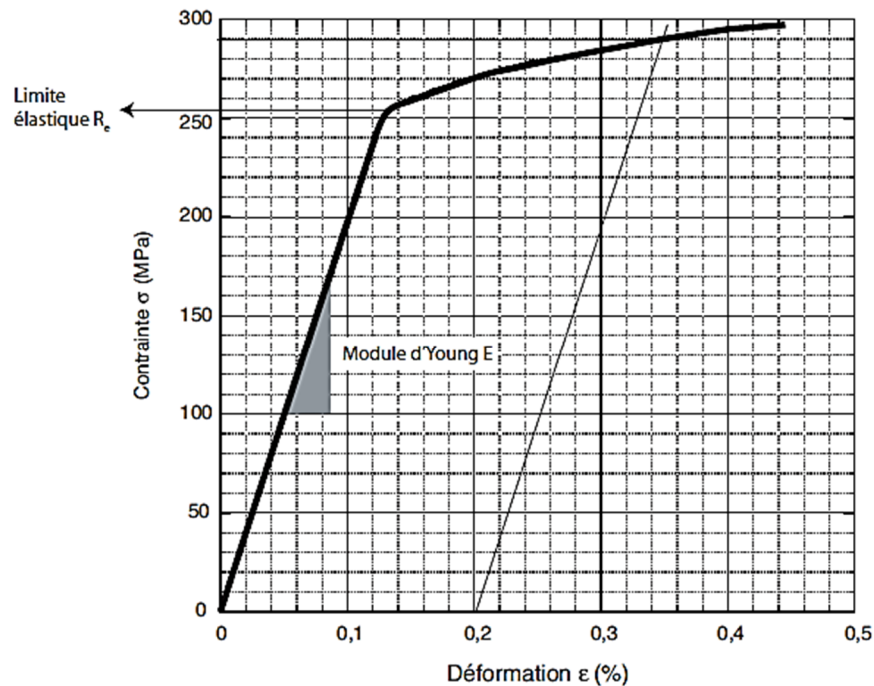
**On ne s'intéresse ici qu'à la zone élastique linéaire.**

Rappelons, qu'on cherche à établir une relation entre la contrainte et la déformation, dans cette zone.

La déformation, notée  $\varepsilon$ , par définition, est **le rapport de la variation de longueur  $\Delta L$  sur la longueur de référence  $L_0$**  :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}, \text{ sans unité et exprimée en \%}.$$

Les mesures de  $N$  et  $\Delta L$  précédemment établis, permettent de représenter l'évolution de la contrainte  $\sigma = \frac{N}{S}$  en fonction de  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$  :



*Figure 17. Courbe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , zone linéaire élastique.*

Le comportement du matériau constituant la poutre est jugé **élastique linéaire**, tant que **la contrainte est inférieure à une valeur limite, appelée limite élastique et noté  $R_e$** .

Dans cette zone linéaire élastique, il existe une relation linéaire entre la contrainte normale  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$ , telle que :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Cette loi est appelée **loi de Hooke**,  $E$  est appelé **module d'Young**, unité (Pa).

**Remarque :**

- Le module d'Young est une caractéristique propre à chaque matériau, **pour un acier, par exemple, E est de l'ordre de 210 000 Mpa, pour l'aluminium, il est de l'ordre de 70 000 Mpa.**
- La loi de Hooke permet d'établir une relation entre déformation et effort normal, en effet :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{N}{S} \text{ d'où :}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot S}$$

**E. Critère de dimensionnement :**

Pour dimensionner une poutre, on exige d'avoir un **comportement linéaire élastique**, le critère de contrainte s'écrit :  $\sigma \leq Re$  (limite élastique). Souvent, on prend en compte un coefficient dit de sécurité  $s \geq 1$  pour rester bien loin de la limite élastique :

Ainsi, le critère de dimensionnement en termes de contrainte s'écrit :

$$s \cdot \sigma \leq Re$$

## 5.2. La flexion simple :

### A. Définition :

Une poutre est dite sollicitée en flexion simple, si le torseur de cohésion prend la forme suivante :

$$\{T \text{ int}(\text{flexion simple})\}_G = \begin{Bmatrix} Ty \cdot \vec{y} \\ Mfz \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

Dans le cas particulier où  $Ty = 0$ , la flexion est dite **pure**.

### B. Dépendance entre l'effort tranchant $Ty$ et le moment fléchissant $Mfz$ :

Dans le cas d'une sollicitation simple ; le torseur à deux composantes,  $Ty$  et  $Mfz$ , cependant, ces deux composantes ne sont pas indépendantes, pour le montrer, adoptant le schéma suivant :

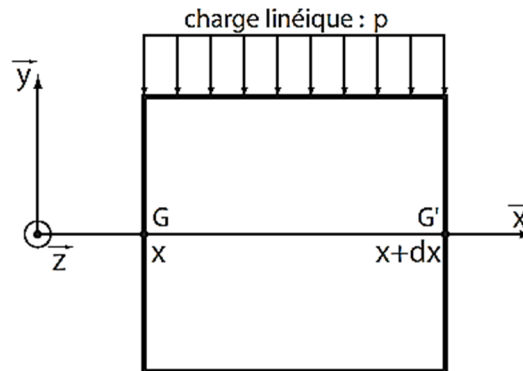


Figure 18. Schématisation d'un tronçon de poutre élémentaire, sollicité en flexion simple.

Pour établir cette relation de dépendance **locale**, il faut se placer au niveau d'un tronçon de poutre élémentaire de longueur  $dx$ . Dans ce cas, les efforts extérieurs applicables sont forcément répartis, caractérisée par une charge linéique  $-p \cdot \vec{y}$  (unité :  $N/m^2$ ). Afin de simplifier les calculs, on supposera que  $p$  est **uniforme**.

Isolons ce tronçon, pour lui appliquer le Principe Fondamental de la Statique :

- A gauche, le tronçon est soumis aux actions mécaniques appliquées par la partie gauche sur le tronçon, réduites au point G, d'abscisse  $x$  :

$$\{T (\text{partie gauche} \rightarrow \text{tronçon})\}_G = - \{T \text{ int}\}_G = \begin{Bmatrix} -Ty \cdot \vec{y} \\ -Mfz \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

- A droite, le tronçon est soumis aux actions mécaniques appliquées par la partie droite sur le tronçon, **mais cette fois réduites au point G', d'abscisse  $x+dx$**  :

$$\bullet \{T (\text{partie droite} \rightarrow \text{tronçon})\}_G = + \{T \text{ int}\}_G = \begin{Bmatrix} (Ty + dTy) \cdot \vec{y} \\ (Mfz + dMfz) \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

- Le théorème de la résultante statique, en projection suivant  $\vec{y}$  s'écrit :  

$$-T_y + T_y + dT_y - p \cdot dx = 0$$
- Le théorème du moment statique, en  $G'$ , en projection suivant  $\vec{z}$  s'écrit :  

$$M_{fz} + dM_{fz} - M_{fz} + T_y \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot p \cdot dx^2 = 0$$

En négligeant les termes de deuxième ordre, dans le cas d'une sollicitation en flexion simple, on a :

$$\frac{dT_y}{dx} = p \text{ et } \frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y$$

#### Remarque :

- L'effort tranchant et le moment fléchissant sont liés, par conséquent, lors de l'évaluation du torseur de cohésion, cette relation permet de vérifier l'exactitude du résultat trouvé.
- Les valeurs finies de  $T_y$  imposent des **dérivées finies du moment fléchissant**, par conséquent, au niveau du diagramme d'évolution du moment fléchissant, **on ne retrouvera jamais une pente verticale**.
- Dans le cas d'une sollicitation en **flexion pure** ( $T_y=0$ ), **le moment fléchissant est constant**, donc, pour le représenter, il suffit de le calculer **en un point quelconque** de la poutre.

### C. Répartition des contraintes :

Contrairement au cas de la traction, où on s'est basé sur un constat expérimental pour établir un **modèle** de répartition des contraintes, dans le cas de la flexion simple, on se base sur **un constat à la fois géométrique et expérimental pour établir la répartition des contraintes**.

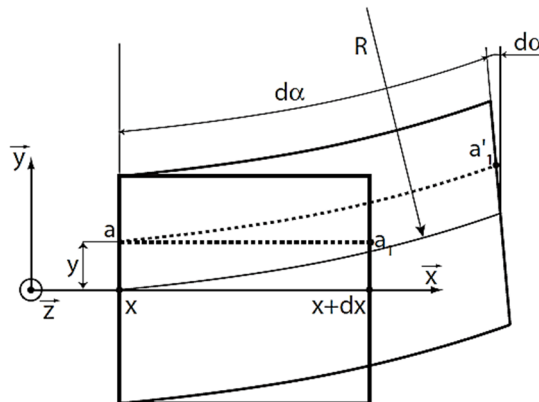


Figure 19. Tronçon de poutre élémentaire sollicité en flexion simple, avant et après déformation.

Intéressons-nous à la variation de la longueur d'une fibre quelconque  $\overline{aa'}$  du tronçon (ordonnée  $y$ ), avant et après déformation.

Expérimentalement, on constate que :

- Les fibres situées au-dessus de la fibre moyenne ( $y>0$ ) se raccourcissent, alors que les fibres situées en dessous ( $y<0$ ) s'allongent, la fibre moyenne/neutre ( $y=0$ ) conserve sa longueur.

⇒ La variation de la longueur des fibres permet d'affirmer qu'elles sont soumises à des contraintes **normales**.

⇒ La variation de la longueur entre deux fibres voisines ( $y$  et  $y+dy$ ) n'est pas identique, par conséquent, une **contrainte tangentielle longitudinale**  $\tau$  doit exister dans les plans  $(\vec{x}, \vec{z})$ .

Le principe de réciprocité en mécanique des milieux continus (admis ici), assure que dans cette configuration, **une contrainte tangentielle transversale**  $\tau$  doit exister dans les plans  $(\vec{y}, \vec{z})$ .

- On montre que la contrainte tangentielle ne dépend que de  $y$  :

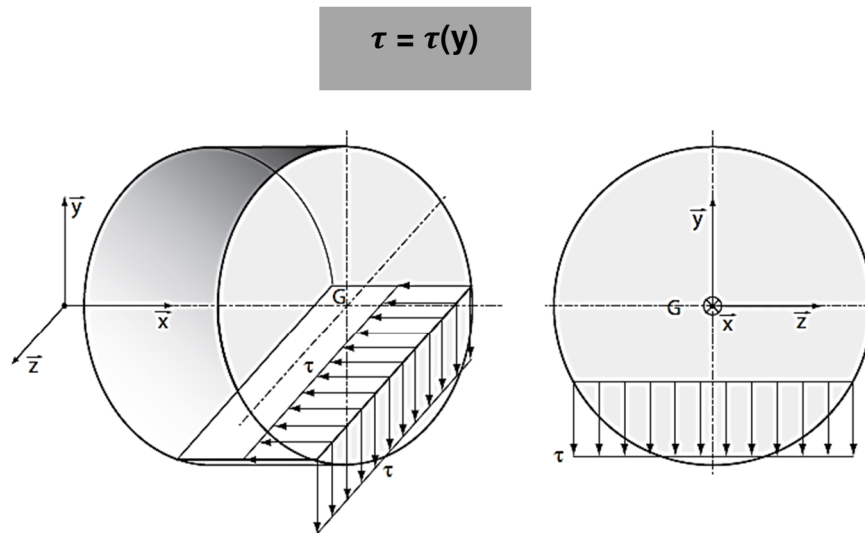


Figure 20. Répartition des contraintes tangentielles dans une poutre en flexion simple.

- Répartition des contraintes normales dans une section droite (S) :

La loi de Hooke établie expérimentalement dans le cas de la traction, est aussi valable dans le cas de la flexion simple :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \text{ avec } \varepsilon \text{ qui représente la déformation.}$$

Dans le cas de la flexion simple du tronçon élémentaire, la déformation s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\overline{aa'} - \overline{aa_1}}{\overline{aa_1}}, \text{ avec } \overline{aa_1} = dx.$$

Exprimons donc  $\overline{aa'}$  :

Il s'agit d'un tronçon de courbe curviligne qui peut être exprimée en fonction du rayon de courbure selon la relation :

$$\overline{aa_1} = (R-y) \cdot d\alpha$$

Avec  $R$ , le rayon de courbure de la fibre neutre défini par  $R = \frac{dx}{d\alpha}$ .

$$\text{Il vient : } \varepsilon = \frac{\overline{aa'} - \overline{aa_1}}{\overline{aa_1}} - 1 = \varepsilon = \frac{R-y}{R} - 1 = -\frac{y}{R}.$$

Au final, la contrainte normale dans une section droite (S), dans le cas d'une flexion simple, à une répartition linéaire suivant la relation :

$$\sigma = -E \cdot \frac{y}{R}$$

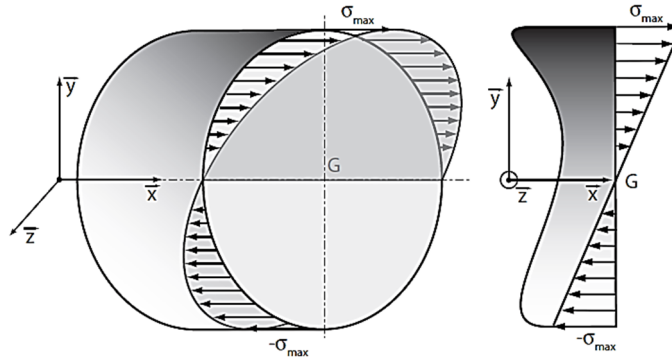


Figure 21. Répartition des contraintes normales dans une section droite (S) d'une poutre en flexion simple.

A priori, pour une sollicitation de flexion simple, le vecteur contrainte prend l'expression suivante :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -E \cdot \frac{y}{R} \cdot \vec{x} + \tau(y) \cdot \vec{y}$$

#### D. Relation entre moment fléchissant et contrainte normale :

Les résultats précédemment établis permettent d'exprimer une relation explicite entre le moment fléchissant, qui est une grandeur globale, et la contrainte normale, qui est une grandeur locale.

En effet :

$$\{T \text{ int}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} T_y \cdot \vec{y} \\ M_{fz} \cdot \vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot d\mathbf{S} \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \iint_{(S)} (-E \cdot \frac{y}{R} \cdot \vec{x} + \tau(y) \cdot \vec{y}) \cdot d\mathbf{S} \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge (-E \cdot \frac{y}{R} \cdot \vec{x} + \tau(y) \cdot \vec{y}) \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right\}_G$$

Ce qui donne :

$$\bullet \quad T_y \cdot \vec{y} = \iint_{(S)} (-E \cdot \frac{y}{R} \cdot \vec{x} + \tau(y) \cdot \vec{y}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Relation (1)}$$

$$\bullet \quad M_{fz} \cdot \vec{z} = \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge (-E \cdot \frac{y}{R} \cdot \vec{x} + \tau(y) \cdot \vec{y}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Relation (2)}$$

$$\bullet \quad \text{La relation (1) se développe en : } T_y \cdot \vec{y} = -\frac{E}{R} \iint_{(S)} y \cdot d\mathbf{S} \cdot \vec{x} + \iint_{(S)} \tau(y) \cdot y \cdot d\mathbf{S} \cdot \vec{y}$$

Or G est **centre d'inertie** de la section droite (S), donc :  $\iint_{(S)} \vec{GM} \cdot d\mathbf{S} = \vec{0}$ .



En projection suivant  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , cette relation donne :

$$\iint_{(S)} y \cdot dS = 0 \text{ et } \iint_{(S)} z \cdot dS = 0$$

**Remarque :**

- $\iint_{(S)} y \cdot dS$  est appelé le moment statique de la section droite (S) par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$ .  
(unité : m<sup>3</sup>).
- $\iint_{(S)} z \cdot dS$  est appelé le moment statique de la section droite (S) par rapport à l'axe  $(G, \vec{y})$ .  
(unité : m<sup>3</sup>).

La relation (1) évolue pour donner :

$$T_y = \iint_{(S)} \tau(y) \cdot dS$$

Relation (3)

La relation (2) s'écrit :

$$Mf_z \cdot \vec{z} = \iint_{(S)} (y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \wedge \left( -E \cdot \frac{y}{R} \cdot \vec{x} + \tau(y) \cdot \vec{y} \right) \cdot dS = \iint_{(S)} \left( E \cdot \frac{y^2}{R} \cdot dS \right) \cdot \vec{z} + \iint_{(S)} \left( -\frac{E}{R} \cdot y \cdot z \cdot dS \right) \cdot \vec{y} + \iint_{(S)} \left( -z \cdot \tau(y) \cdot dS \right) \cdot \vec{x}$$

1

2

3

**Remarque :**

- **La deuxième intégrale** contient le terme  $\iint_{(S)} y \cdot z \cdot dS$ , qui est le produit d'inertie par rapport aux axes  $(G, \vec{y})$  et  $(G, \vec{z})$ , en analogie avec le cours de dynamique, **ce terme est nul** car  $(G, \vec{x}, \vec{y})$  est plan **de symétrie de la poutre (poutre à plan moyen)**.
- **La troisième intégrale est nulle aussi**,  $(G, \vec{x}, \vec{y})$  est plan **de symétrie de la poutre et  $\tau$  ne dépend pas de z.**

Enfin, La relation 2 devient :

$$Mf_z = \frac{E}{R} \cdot \iint_{(S)} y^2 \cdot dS$$

Relation (4)

On pose :  $I_{Gz} = \iint y^2 \cdot dS$ , qu'on appelle **le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$ .**

Rappelons que :  $\sigma = -E \cdot \frac{y}{R}$ , et d'après la relation 4 :  $\frac{E}{R} = \frac{Mf_z}{I_{Gz}}$

En synthèse, **pour une sollicitation en flexion simple**, La répartition de la contrainte normale  $\sigma$  au niveau d'une section droite (S) est linéaire, elle est liée au moment fléchissant par la relation suivante :

$$\sigma = - \frac{Mfz}{I_{Gz}} \cdot y$$

$I_{Gz} = \iint_{(S)} y^2 \cdot dS$  est le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à l'axe (G,  $\vec{z}$ ).

### Remarque :

- Le moment quadratique a pour unité  $m^4$ , usuellement, on utilise le  $mm^4$ .
- L'utilisation du moment quadratique  $I_{Gz}$  d'une section carrée ou circulaire est très ré pondue.

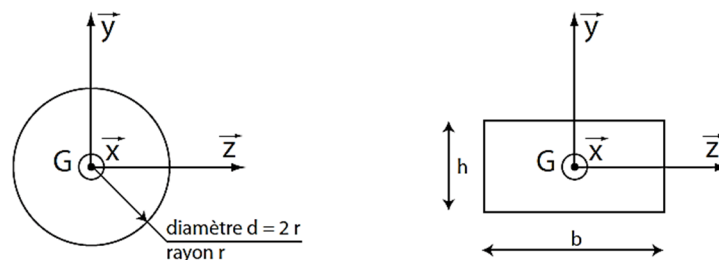


Figure 22. Paramétrage de deux sections géométriques classiques.

- Moment quadratique d'une section carrée :

$$I_{Gz} (\text{section carrée } b \times h, b // \vec{z}) = \iint_{(S)} y^2 \cdot dz \cdot dy = \int_{-b/2}^{+b/2} dz \cdot \left( \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot dy \right) = b \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = b \cdot \frac{h^3}{12}.$$

- Moment quadratique d'une section circulaire :

$$\text{On constate que : } \iint_{(S)} r'^2 \cdot dS = \iint_{(S)} y^2 \cdot dS + \iint_{(S)} z^2 \cdot dS = 2 \cdot \iint_{(S)} y^2 \cdot dS$$

$$\text{Il vient } I_{Gz} (\text{section circulaire}) = \frac{1}{2} \cdot \iint_{(S)} r'^2 \cdot dS = \frac{1}{2} \cdot \int_0^r r'^2 \cdot 2 \cdot \Pi \cdot r' \cdot dr' = \Pi \cdot \left[ \frac{r'^4}{4} \right]_0^r = \Pi \cdot \frac{d^4}{64}.$$

$$I_{Gz} (\text{section carrée } b \times h, b // \vec{z}) = b \cdot \frac{h^3}{12}, \quad I_{Gz} (\text{section circulaire, diamètre } d) = \Pi \cdot \frac{d^4}{64}$$

### E. La contrainte tangentielle , modèle simplifié :

La relation 3, précédemment établie s'écrit :

$$T_y = \iint_{(S)} \tau(y) dS$$

**Le modèle simplifié** de la contrainte tangentielle consiste à prendre  $\tau$  constante au niveau d'une section droite (S), ainsi :

$$\tau = \frac{T_y}{S}$$

### Remarque :

On trouvera souvent des valeurs de **contrainte tangentielle largement négligeables devant celles de contrainte normale  $\sigma$** , par conséquent, **dimensionner une poutre en flexion est largement piloté par l'effet des contraintes normales et non tangentielles.**

## F. Equation de la déformée :

En termes de dimensionnement d'une poutre en flexion simple, il est intéressant d'avoir l'équation de la **courbe caractérisant le déplacement de la ligne moyenne** de la poutre après déformation, en vue de déterminer le point à déplacement maximal.

La **ligne moyenne après déformation est appelée déformée**. La **valeur de déplacement en un point** est appelée **flèche** :

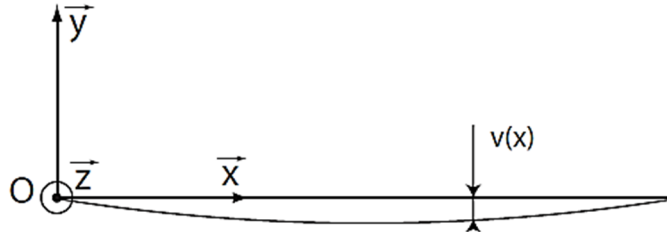


Figure 23. Déformée de la ligne moyenne et flèche au point d'abscisse  $x$ .

Dans une telle configuration, le rayon de courbure par définition est donné par la relation :

$$R = \frac{(1+v'^2)^{3/2}}{v''}$$

L'hypothèse des petites perturbations permet de négliger le terme  $v'$  au numérateur, ainsi :

$$R = \frac{1}{v''}$$

La relation (4)  $\left(\frac{E}{R} = \frac{Mfz}{I_{Gz}}\right)$  permet d'écrire :

$$E \cdot I_{Gz} \cdot v'' = M_{fz}$$

### Remarque :

Cette relation permet, en l'intégrant, d'établir l'équation de la déformée en prenant en compte les conditions aux limites en termes de déplacement.

## G. Critères de dimensionnement :

Pour dimensionner une poutre sollicitée en flexion simple, **l'effet de la contrainte normale est prépondérant par rapport à celui de la contrainte tangentielle**, par conséquent :

- Le critère de contrainte, comme dans le cas de la traction/compression s'écrit :

$$s \cdot \sigma \leq Re$$

- Le critère sur la flèche maximale  $v_{\max}$  s'écrit :

$$s' \cdot v_{\max} \leq v_{\lim}$$

- Le critère sur la rotation maximale s'écrit :

$$s'' \cdot \frac{dv}{dx} \leq \omega_{\lim}(\text{rad})$$

### 5.3. La torsion :

#### A. Définition

Une poutre est dite sollicitée en torsion, si le torseur de cohésion prend la forme suivante :

$$\{T \text{ int(torsion)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ Mt.\vec{x} \end{array} \right\}_G$$

Dans ce qui suit, on se limitera au cas des poutres droites à section circulaire,

#### B. Modèle de répartition des contraintes :

Comme pour le cas de la traction, le modèle de répartition des contraintes est construit à partir de constats expérimentaux.

Pour l'expérimentation, on soumet l'extrémité d'un barreau cylindrique à un moment suivant son axe, alors que maintient fixe la deuxième extrémité, des traceurs permettent de visualiser la déformation du barreau après déformation :

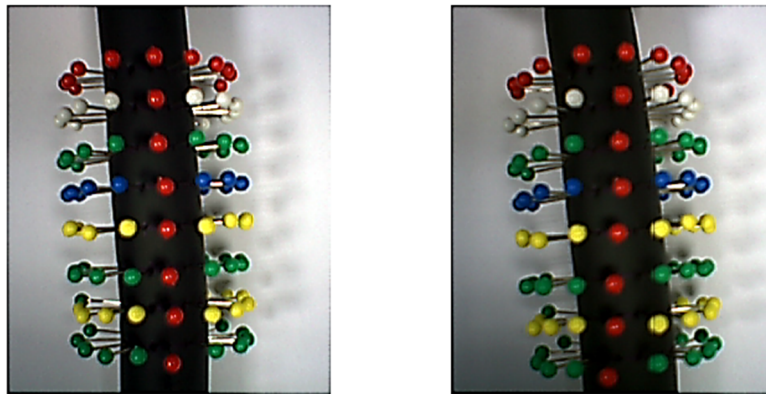


Figure 24. Poutre avant (à gauche) et après (à droite) déformation.

Pour mieux analyser le résultat expérimental, on adopte le schéma idéalisé suivant :

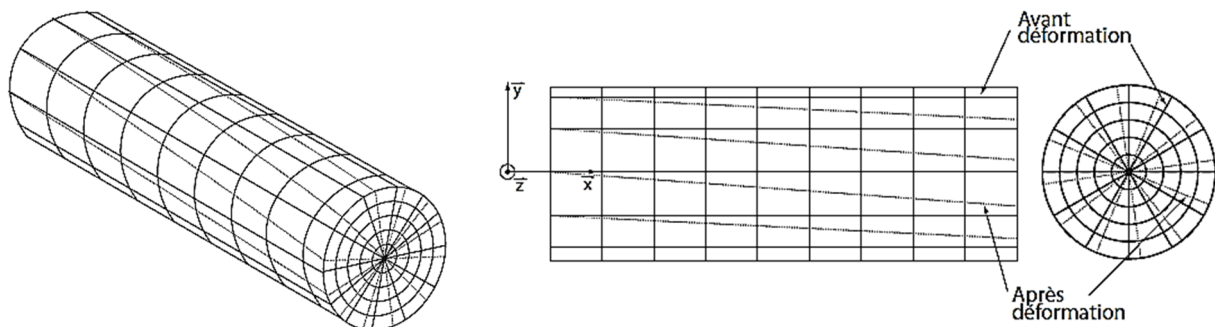


Figure 25. Résultat expérimental de la torsion de la poutre, version idéalisée.

La grille qui apparaît sur cette figure correspond aux épingles (traceurs) qui apparaissent sur la figure 24 lors de l'expérimentation.

A partir de ces résultats, on observe que :

- Toute section droite (plane et normale à l'axe du barreau) avant déformation reste droite après déformation, par conséquent l'hypothèse de Navier-Bernoulli est bien vérifiée.
- La distance entre deux sections droites reste quasiment constante.

⇒ Absence de déformation longitudinale de la poutre, par conséquent **la contrainte normale le long du barreau cylindrique est nulle.**

- Pour toute section droite du barreau, le seul mouvement constaté est une rotation autour de son axe.

⇒ Ce mouvement génère une déformation dans la section droite, **par conséquent une contrainte tangentielle est présente.**

- La rotation d'une section droite (S) est proportionnelle à sa distance par rapport à l'extrémité fixe du barreau cylindrique.
- En observant l'extrémité libre du barreau cylindrique (modèle figure 26), on constate qu'il se comporte comme une infinité de cylindres à rayon variable, tournant les uns par rapport aux autres, **ce mouvement de rotation** entre deux couches voisines **génère un cisaillement**, donc une contrainte tangentielle dont la direction est tangente à ces couches :

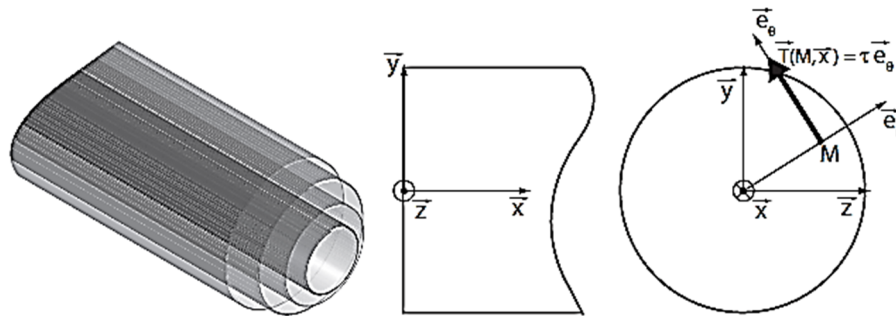


Figure 26. Modèle de contrainte tangentielle traduisant les constats expérimentaux, coordonnées polaires.

Ainsi, **pour une sollicitation de torsion**, le vecteur contrainte n'a qu'une composante tangentielle, qui est plus exactement suivant la direction orthoradiale :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \tau \cdot \vec{e}_\theta$$

Pour déterminer la répartition de la contrainte tangentielle dans une section droite (S), intéressons-nous à un tronçon élémentaire du barreau cylindrique :

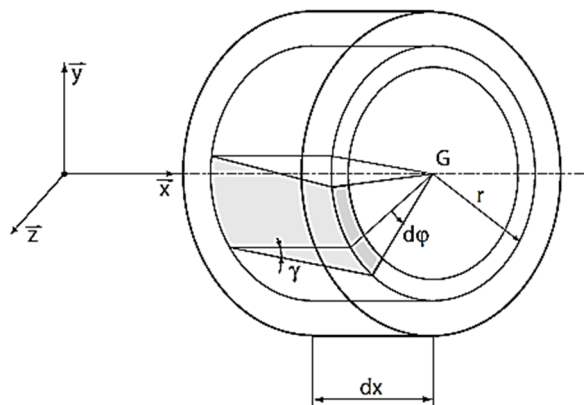


Figure 27. Tronçon de poutre élémentaire sollicité en torsion.

Sur la figure ci-dessus :

- $d\varphi$  représente l'angle de rotation entre les deux sections droites en  $x$  et  $x+dx$ .
- $\gamma$  représente la **distorsion, appelé aussi la déformation en cisaillement, qui traduit une déformation angulaire, en parallèle à  $\varepsilon$  qui représente la déformation dans le cas de la traction.**  $\gamma$  est sans unité.

L'hypothèse des petits déplacements permet d'écrire :

$$\tan(\gamma) = \gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{Relation (5)}$$

On introduit la grandeur :  $\Theta = \frac{d\varphi}{dx}$ , appelé angle unitaire de torsion (unité rad/m), ainsi la relation (5) devient :

$$\gamma = r \cdot \Theta$$

### Remarque :

De manière analogue à l'essai de traction, un essai de torsion montre qu'il existe une zone élastique linéaire telle que la contrainte tangentielle  $\tau$  est proportionnelle à la déformation en cisaillement  $\gamma$ .

Par conséquent, la loi de Hooke dans le cas du cisaillement s'écrit :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$G$  : module de cisaillement qui s'exprime par :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E$  : module d'Young et  $\nu$  : coefficient de poisson propre au matériau.

- Pour un acier,  $G = 80\,000$  MPa.
- Pour l'aluminium,  $G = 26\,000$  MPa.

Les résultats précédents permettent d'établir l'expression explicite du vecteur contrainte :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \tau(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

avec :  $\tau(r) = G \cdot \Theta \cdot r$

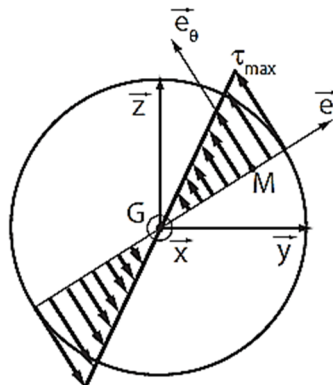


Figure 28. Répartition de la contrainte tangentielle dans une section droite.

### C. Relation entre moment de torsion et contrainte tangentielle :

Pour établir une telle relation, calculons le torseur de cohésion en prenant en compte la forme explicite du vecteur contrainte précédemment établi :

$$\{T \text{ int}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ Mt. \vec{x} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}). dS \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}). dS \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{(S)} \tau(r). \vec{e}_\theta. dS \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \tau(r). \vec{e}_\theta. dS \end{array} \right\}_G$$

Ce qui s'écrit :

$$\bullet \quad \vec{0} = \iint_{(S)} \tau(r). \vec{e}_\theta. dS \quad \text{Relation (6)}$$

$$\bullet \quad Mt. \vec{x} = \iint_{(S)} r. \vec{e}_r \wedge \tau(r). \vec{e}_\theta. dS = \iint_{(S)} r. \tau(r). \vec{x}. dS \quad \text{Relation (7)}$$

Concernant la première relation (6), en prenons deux surfaces élémentaires  $ds_1$  et  $ds_2$  de la section droite, disposées symétriquement par rapport à l'axe, on a :

- Si  $ds_1$  a pour coordonnées  $(r, \theta_1)$ , alors  $ds_2$  a pour coordonnées  $(r, \theta_1 + \pi)$ .
- $\tau(r). ds_1 = \tau(r). ds_2$ .
- $\vec{e}_{\theta_1} = -\vec{e}_{\theta_1 + \pi}$ .

Ainsi  $\tau(r). ds_1 \vec{e}_{\theta_1} = -\tau(r). ds_2 \vec{e}_{\theta_1 + \pi}$ .

Cette propriété permet de montrer que  $\iint_{(S)} \tau(r). \vec{e}_\theta. dS$  est nul. Par conséquent la relation (6) est vérifiée.

La relation (7) s'écrit :

$$Mt = \iint_{(S)} r. \tau(r). dS = G. \theta. \iint_{(S)} r^2. dS$$

On pose :  $I_{Gx} = \iint_{(S)} r^2. dS$ , qu'on appelle **le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à l'axe  $(G, \vec{x})$** .

#### Remarque :

Le moment quadratique d'une section circulaire de rayon R, Il vient :

$$I_{Gx} (\text{section circulaire}) = \iint_{(S)} r^2. dS = \int_0^R r^2. 2. \pi. r. dr = 2. \pi. R^4 / 4 = \pi. \frac{d^4}{32}$$

Ainsi :

$$I_{Gx} (\text{section circulaire, diamètre } d) = \pi. \frac{d^4}{32}$$

Il vient donc :  $M_t = G. \theta. I_{Gx}$ , rappelons que :  $\tau(r) = G. \theta. r$ .

Au final, **pour une sollicitation de torsion**, La répartition de la contrainte tangentielle  $\tau$  **au niveau d'une section droite (S) est linéaire**, elle est liée au moment de torsion par la relation suivante :

$$\tau = \frac{Mt}{I_{Gx}} \cdot r$$

$I_{Gx} = \iint r^2 \cdot dS$  est le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à l'axe  $(G, \vec{x})$ .

### Remarque :

Souvent, on est amené à évaluer l'angle de rotation au bout de la poutre, rappelons que  $\Theta = \frac{d\varphi}{dx}$

Il vient,  $d\varphi = \Theta \cdot dx$ , or  $Mt = G \cdot \Theta \cdot I_{Gx}$ , d'où :  $d\varphi = \frac{Mt}{G \cdot I_{Gx}} \cdot dx$

Ainsi :

L'angle de la rotation de la section extrême du barreau  $\varphi(L)$  est donné par la relation :

$$\varphi(L) - \varphi(0) = \varphi(L) = \frac{Mt}{G \cdot I_{Gx}} \cdot L$$

$\varphi(0) = 0$  au niveau de la section encastree (aucune rotation suivant  $\vec{x}$ ).

## D. Critères de dimensionnement :

Pour dimensionner une poutre sollicitée en torsion, **deux critères sont utilisés** :

- **Le critère de contrainte, comme dans le cas de la traction/compression, le comportement élastique du matériau exige que :**

$$s \cdot \tau \leq R_{pg}$$

Avec  $R_{pg}$  : limite d'élasticité **en cisaillement**, ou limite **pratique de glissement**.

- **Le critère de rotation, traduit le fait que la rotation en un point donné M de la poutre ne doit pas dépasser une certaine limite d'utilisation :**

$$s' \cdot \varphi(M) \leq \varphi_{lim}(rd)$$



## 5.4. Le cisaillement pur :

### A. Définition :

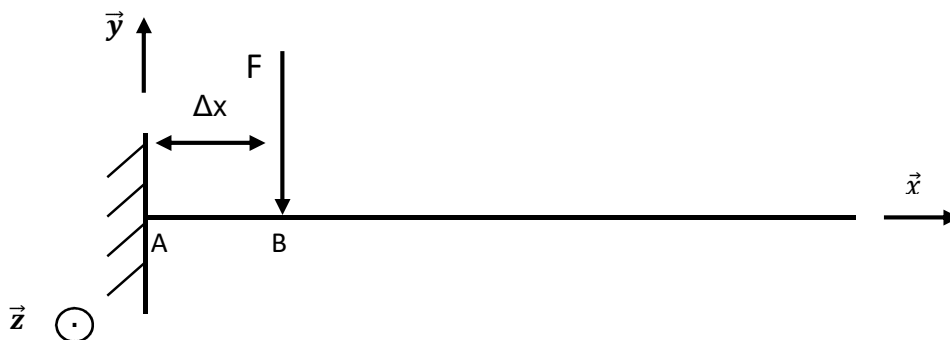
Une poutre est dite sollicitée en cisaillement pur, si le torseur de cohésion prend la forme suivante :

$$\{T \text{ int}(\text{cisaillement pur})\} = \left\{ \begin{array}{l} T y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathbf{G}}$$

### Remarque :

- Le cas d'un cisaillement pur ne peut se rencontrer que dans une section droite particulière d'une poutre, il s'agit donc d'un cas dérivant de celui de la flexion simple, lorsque le moment de flexion s'annulera. Ainsi les résultats de la flexion simple concernant l'effort tranchant et la contrainte de cisaillement  $\tau$  restent valables.

### B. Essai de cisaillement, réalisation pratique :



Soit la configuration correspondant à la figure ci-dessus, le torseur de cohésion dans le tronçon [AB], s'écrit :

$$\{T \text{ int}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \cdot \vec{y} \\ -F(\Delta x - x) \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{\mathbf{G}}$$

Au niveau de la section  $S_A$  ( $x=0$ ), le torseur de cohésion se réduit à :

$$\{T \text{ int}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \cdot \vec{y} \\ -F \cdot \Delta x \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{\mathbf{G}}$$

Il suffit donc de prendre  $\Delta x$  très petit pour obtenir une sollicitation de cisaillement pure.

### C. Relation entre effort tranchant et contrainte tangentielle :

Les résultats de la flexion simple restent valables pour le cas particulier, où le moment fléchissant est nul, et donc pour le cisaillement pur.

A priori, pour une sollicitation de cisaillement pure, le vecteur contrainte prend l'expression suivante :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \tau(y) \cdot \vec{y}$$

**Remarque :**

- La contrainte normale est nulle en absence de moment fléchissant.

La loi de Hooke reste valable aussi dans le cas du cisaillement pur :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G : module de cisaillement qui s'exprime par :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , E : module d'Young et  $\nu$  : coefficient de poisson propre au matériau.

Ainsi :

$$\{T \text{ int}\} = \begin{Bmatrix} T_y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \iint_{(S)} \tau(y) \cdot \vec{y} \cdot dS \\ \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \tau(y) \cdot \vec{y} \cdot dS \end{Bmatrix}_G$$

Ce qui donne :

- $T_y \cdot \vec{y} = \iint_{(S)} \tau \cdot \vec{y} \cdot dS$  Relation (8)
- $\vec{0} = + \iint_{(S)} (-z \cdot \tau(y) \cdot dS) \cdot \vec{x}$  , cette égalité est vérifiée (voir cas de la flexion simple).

La relation (8) s'écrit :

$$T_y = \iint_{(S)} \tau \cdot dS$$
 Relation (9)

La contrainte tangentielle , selon le modèle simplifié, la contrainte tangentielle  $\tau(y)$  **est supposé constante au niveau d'une section droite** :  $\tau = \tau_{\text{moy}}$

Il vient :

$$\tau = \frac{T_y}{S}$$

**D. Critères de dimensionnement :**

- Pour dimensionner une poutre sollicitée en cisaillement pur, **le comportement élastique du matériau exige que :**

$$s \cdot \tau \leq R_{pg}$$

Avec,  $R_{pg}$  : limite d'élasticité **en cisaillement**, ou limite **pratique de glissement**.